

equazioni binomie

• *che cos'è*: un'equazione si dice **binomia** se è formata da un termine di grado n ed un termine noto:

$$ax^n + b = 0$$

• *come si risolve*: si ricava x^n e si estrae la radice algebrica n -sima distinguendo i casi con n pari e quelli con n dispari:

$$ax^n + b = 0 \rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \begin{cases} \text{se } n \text{ è pari} & x = \pm \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \text{ ha due soluzioni (opposte) solo se il} \\ & \text{radicando è maggiore o uguale a 0} \\ \text{se } n \text{ è dispari} & x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \text{ ha sempre una sola soluzione che ha lo} \\ & \text{stesso segno del radicando} \end{cases}$$

esempi caso n pari

- $2x^6 - 16 = 0 \rightarrow 2x^6 = 16 \rightarrow x^6 = 8 \rightarrow x = \pm \sqrt[6]{8} \rightarrow x = \pm \sqrt[6]{2^3} \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$
- $2x^6 + 16 = 0 \rightarrow 2x^6 = -16 \rightarrow x^6 = -8 \rightarrow x = \pm \sqrt[6]{-8} \rightarrow$ nessuna soluzione

esempi caso n dispari

- $2x^3 - 16 = 0 \rightarrow 2x^3 = 16 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} \rightarrow x = 2$
- $2x^3 + 16 = 0 \rightarrow 2x^3 = -16 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} \rightarrow x = -2$

equazioni biquadratiche

• *che cos'è*: un'equazione si dice **biquadratica** se è formata da un termine di 4° grado, uno di 2° grado ed un termine noto:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

• *come si risolve*: si sostituisce la x^2 con la variabile ausiliaria t ottenendo una equazione di 2° grado in t ; si risolve l'equazione di 2° grado in t ; si risostituisce la x^2 al posto di t_1 e t_2 ; si risolvono le due equazioni binomie:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0 \quad \begin{cases} t_1 \rightarrow x^2 = t_1 \\ t_2 \rightarrow x^2 = t_2 \end{cases}$$

esempio con 4 soluzioni reali: caso t_1 e t_2 positivi

$$\bullet \quad x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \quad x^2 = t \rightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ t_2 = 7 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

esempio con 2 soluzioni reali: caso t_1 negativo e t_2 positivo (o viceversa)

$$\bullet \quad x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = t \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = -3 \rightarrow x^2 = -3 \rightarrow x = \text{nessuna soluzione} \\ t_2 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

esempio con nessuna soluzione reale: caso t_1 e t_2 negativi

$$\bullet \quad x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \quad x^2 = t \rightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = -2 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \text{nessuna soluzione} \\ t_2 = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \text{nessuna soluzione} \end{cases}$$

equazioni trinomie

• *che cos'è*: un'equazione si dice **trinomia** se è formata da un termine di grado $2n$, uno di grado n ed un termine noto:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

• *come si risolve*: si sostituisce la x^n con la variabile t ottenendo una equazione di 2^0 grado in t ; si risolve l'equazione di 2^0 grado in t ; si risostituisce la x^n al posto di t_1 e t_2 ; si risolvono le due equazioni binomie:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad x^n = t \rightarrow \quad at^2 + bt + c = 0 \quad \begin{cases} t_1 \rightarrow x^n = t_1 \\ t_2 \rightarrow x^n = t_2 \end{cases}$$

esempi

$$\bullet \quad x^6 - 2x^3 - 8 = 0 \quad x^3 = t \rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = -2 \rightarrow x^3 = -2 \rightarrow x = \sqrt[3]{-2} \\ t_2 = 4 \rightarrow x^3 = 4 \rightarrow x = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$\bullet \quad x^8 - 2x^4 - 8 = 0 \quad x^4 = t \rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = -2 \rightarrow x^4 = -2 \rightarrow x = \text{nessuna soluzione} \\ t_2 = 4 \rightarrow x^4 = 4 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

disequazioni binomie

una disequazione binomia $ax^n + b \gtrless 0$ si risolve in modo diverso a seconda che l'esponente n sia un numero pari o un numero dispari. Distinguiamo i due casi.

caso n pari: una disequazione binomia si risolve con lo stesso procedimento di una disequazione di 2^0 grado pura, cioè

- si trasforma la disequazione binomia nell'equazione binomia associata e si risolve l'equazione
- se l'equazione associata ha due soluzioni reali e distinte allora $\Delta > 0$; se non ha soluzioni reali allora $\Delta < 0$
- si perviene alla soluzione della disequazione binomia consultando la tabella risolutiva delle disequazioni di 2^0 grado, tenendo conto del segno del Δ e del segno della disequazione

esempi caso n pari

$$x^4 - 2 > 0 \rightarrow x^4 - 2 = 0 \rightarrow x^4 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{2} \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow x < -\sqrt[4]{2} \cup x > \sqrt[4]{2}$$

$$x^4 - 2 < 0 \rightarrow x^4 - 2 = 0 \rightarrow x^4 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{2} \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow -\sqrt[4]{2} < x < \sqrt[4]{2}$$

$$x^4 + 2 > 0 \rightarrow \forall x \in R \text{ perché il primo membro è somma di quantità sempre positive}$$

$$x^4 + 2 < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione perché il primo membro è sempre positivo}$$

caso n dispari: il procedimento risolutivo è unico, cioè

- si isola x^n al primo membro
- si estrae la radice algebrica n-sima al primo e al secondo membro

esempi caso n dispari

$$x^3 - 2 > 0 \rightarrow x^3 > 2 \rightarrow x > \sqrt[3]{2}$$

$$x^3 - 2 < 0 \rightarrow x^3 < 2 \rightarrow x < \sqrt[3]{2}$$

$$x^3 + 2 > 0 \rightarrow x^3 > -2 \rightarrow x > \sqrt[3]{-2} \rightarrow x > -\sqrt[3]{2}$$

$$x^3 + 2 < 0 \rightarrow x^3 < -2 \rightarrow x < \sqrt[3]{-2} \rightarrow x < -\sqrt[3]{2}$$

disequazioni biquadratiche e trinomie

una disequazione biquadratica $ax^4 + bx^2 + c \gtrless 0$ o una disequazione trinomia $ax^{2n} + bx^n + c \gtrless 0$ si risolve così:

- si sostituisce x^2 o x^n con la variabile ausiliaria t esattamente come già fatto per le equazioni biquadratiche e trinomie
- si ottiene una disequazione di secondo grado nell'incognita t
- si risolve la disequazione
- *al posto di t* si risostituisce la x^2 o la x^n ottenendo due disequazioni binomie nella variabile x
- si risolvono le disequazioni binomie come illustrato nel riquadro precedente