

Probabilità

definizione classica di probabilità

$$P(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

E rappresenta un evento; $P(E)$ è la probabilità che si verifichi l'evento

alcune proprietà

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

$P(E) = 0$ evento impossibile

$P(E) = 1$ evento certo

Due eventi E ed \bar{E} si dicono **complementari** se uno è la negazione dell'altro.

Vale la relazione: $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

esempi

Consideriamo il lancio di un dado. Ai seguenti eventi sono associate le seguenti probabilità:

$E_1 =$ esce il numero 2	$P(E_1) = \frac{1}{6}$	$E_3 =$ esce il numero 7	$P(E_3) = \frac{0}{6} = 0$
$E_2 =$ esce un numero maggiore di 4	$P(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$E_4 =$ esce un numero compreso tra 1 e 6	$P(E_4) = \frac{6}{6} = 1$

tipi di eventi

eventi incompatibili

Due o più eventi si dicono **incompatibili** quando il verificarsi di uno **esclude** gli altri

esempio: consideriamo il lancio di un dado con i seguenti eventi

$E_1 =$ esce il numero 2

$E_2 =$ esce il numero 3

Nel lancio di un solo dado se si verifica E_1 non si può verificare E_2 quindi i due eventi sono incompatibili

eventi compatibili

Due o più eventi si dicono **compatibili** quando il verificarsi di uno **non** esclude il verificarsi degli altri

esempio: consideriamo il lancio di due dadi contemporaneamente ed i seguenti eventi

$E_1 =$ esce il numero 2 su uno dei due dadi

$E_2 =$ esce il numero 3 sull'altro dado

I due eventi E_1 ed E_2 sono compatibili perché il verificarsi di uno NON esclude il verificarsi dell'altro

Nell'ambito degli eventi **compatibili** si distinguono eventi indipendenti ed eventi dipendenti

eventi indipendenti

Due o più eventi si dicono **indipendenti** quando il verificarsi di uno **non** modifica la probabilità di verificarsi degli altri

eventi dipendenti

Due o più eventi si dicono **dipendenti** quando il verificarsi di uno **modifica** la probabilità di verificarsi degli altri

esempio: consideriamo l'estrazione successiva di due carte da un mazzo di 52 carte ed i seguenti eventi

$E_1 =$ esce una carta di cuori

$E_2 =$ esce una figura

Se la prima carta estratta è rimessa nel mazzo e si procede all'estrazione della seconda carta, i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti

Se invece la prima carta estratta è lasciata fuori, la seconda estrazione dipenderà dalla prima ed i due eventi E_1 ed E_2 sono dipendenti

calcolo della probabilità di due o più eventi

probabilità totale

Si parla di probabilità totale di due o più eventi quando si vuole calcolare la probabilità che si verifichi **uno solo** degli eventi $P(E_1 \circ E_2 \circ \dots \circ E_n)$

Per il calcolo bisogna distinguere tra eventi incompatibili ed eventi compatibili

probabilità totale di due o più eventi incompatibili

$$P(E_1 \circ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

generalizzando

$$P(E_1 \circ E_2 \circ \dots \circ E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$$

La probabilità totale di due o più eventi incompatibili è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi

esempio: consideriamo il lancio di un dado. Si vuole calcolare la Probabilità che si verifichi **uno** dei seguenti eventi incompatibili:

E_1 = esce il numero 2

E_2 = esce un numero dispari

$$P(E_1 \circ E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

probabilità totale di due o più eventi compatibili

$$P(E_1 \circ E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 e E_2)$$

dove $P(E_1 e E_2)$ è la probabilità che si verifichino **contemporaneamente** i due eventi

La probabilità totale di **due** eventi compatibili è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi meno la probabilità che si verifichino contemporaneamente i due eventi

Più complessa è la probabilità totale di **tre** eventi compatibili:

$$P(E_1 \circ E_2 \circ E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 e E_2) - P(E_1 e E_3) - P(E_2 e E_3) + P(E_1 e E_2 e E_3)$$

esempio: consideriamo il lancio di un dado. Si vuole calcolare la Probabilità che si verifichi **uno** dei seguenti eventi compatibili:

E_1 = esce il numero 2

E_2 = esce un numero pari

$$P(E_1 \circ E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 e E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

probabilità composta

Si parla di probabilità composta di due o più eventi quando si vuole calcolare la probabilità che si verifichino **tutti** gli eventi **contemporaneamente**. $P(E_1 e E_2 e \dots e E_n)$

Nel caso di eventi **incompatibili** la probabilità composta è nulla.

Nel caso di eventi **compatibili** bisogna distinguere tra eventi indipendenti ed eventi dipendenti.

probabilità composta di due o più eventi compatibili indipendenti

$$P(E_1 e E_2) = P(E_1) * P(E_2)$$

generalizzando

$$P(E_1 e E_2 e \dots e E_n) = P(E_1) * P(E_2) * \dots * P(E_n)$$

La probabilità composta di due o più eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi

esempio: consideriamo l'estrazione successiva di due carte da un mazzo di 52. Si estrae la prima carta e la si **rimette** nel mazzo quindi si estrae la seconda carta. Calcoliamo la Probabilità che si verifichino **contemporaneamente** i seguenti eventi indipendenti

E_1 = esce una carta di cuori

E_2 = esce una figura

$$P(E_1 e E_2) = P(E_1) * P(E_2) = \frac{13}{52} * \frac{12}{52} = \frac{1}{4} * \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$$

probabilità composta di due o più eventi compatibili dipendenti

$$P(E_1 \text{ e } E_2) = P(E_1) * P(E_2/E_1)$$

dove $P(E_2/E_1)$ è la probabilità che si verifichi l'evento E_2 una volta verificatosi l'evento E_1

Tale probabilità è detta **probabilità condizionata** di E_2 al verificarsi di E_1

La probabilità di due eventi dipendenti è uguale al prodotto della probabilità che si verifichi E_1 per la probabilità condizionata di E_2 al verificarsi di E_1

Più complessa è la probabilità composta di **tre** eventi dipendenti:

$$P(E_1 \text{ e } E_2 \text{ e } E_3) = P(E_1) * P(E_2/E_1) * P(E_3/E_1 \text{ e } E_2)$$

esempio: consideriamo l'estrazione successiva di due carte da un mazzo di 52. Si estrae la prima carta e **non** la si rimette nel mazzo quindi si estrae la seconda carta. Calcoliamo la Probabilità che si verifichino **contemporaneamente** i seguenti eventi dipendenti:

E_1 = esce una carta di cuori

E_2 = esce una figura

$$P(E_1 \text{ e } E_2) = P(E_1) * P(E_2/E_1) = \frac{13}{52} * \frac{12}{51} = \frac{1}{4} * \frac{4}{17} = \frac{1}{17}$$

approfondimento: probabilità subordinata

Consideriamo una situazione più complessa: supponiamo di avere tre scatole contenenti palline rosse e verdi come indicato in figura e, scelta una scatola a caso, calcoliamo la probabilità di estrarre una pallina rossa **dalla scatola scelta**



1ª scatola



2ª scatola



3ª scatola

Consideriamo i seguenti eventi

E_1 = scelta della prima scatola

E_2 = scelta della seconda scatola

E_3 = scelta della terza scatola

R/E_1 = estrazione della pallina rossa nel caso in cui si è scelta la prima scatola

R/E_2 = estrazione della pallina rossa nel caso in cui si è scelta la seconda scatola

R/E_3 = estrazione della pallina rossa nel caso in cui si è scelta la terza scatola

Calcoliamo la Probabilità **$P(R)$** di estrarre una pallina rossa da una scatola **scelta a caso**

$$P(R) = P(E_1) * P(R/E_1) + P(E_2) * P(R/E_2) + P(E_3) * P(R/E_3) = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} + \frac{1}{3} * \frac{3}{5} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{5} + \frac{2}{9} = \frac{71}{180}$$

teorema di Bayes

Consideriamo l'esempio del riquadro precedente con in più i seguenti eventi:

R_1 = estrazione della pallina rossa dalla prima scatola

R_2 = estrazione della pallina rossa dalla seconda scatola

R_3 = estrazione della pallina rossa dalla terza scatola

Calcoliamo la probabilità $P(R)$ di estrarre una pallina rossa **da una precisa scatola** $P(R_1)$ o $P(R_2)$ o $P(R_3)$

$$P(R_1) = \frac{P(E_1) * P(R/E_1)}{P(E_1) * P(R/E_1) + P(E_2) * P(R/E_2) + P(E_3) * P(R/E_3)} = \frac{\frac{1}{3} * \frac{1}{4}}{\frac{71}{180}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{71}{180}} = \frac{1}{12} * \frac{180}{71} = \frac{15}{71}$$

$$P(R_2) = \frac{P(E_2) * P(R/E_2)}{P(E_1) * P(R/E_1) + P(E_2) * P(R/E_2) + P(E_3) * P(R/E_3)} = \frac{\frac{1}{3} * \frac{3}{5}}{\frac{71}{180}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{71}{180}} = \frac{1}{5} * \frac{180}{71} = \frac{36}{71}$$

$$P(R_3) = \frac{P(E_3) * P(R/E_3)}{P(E_1) * P(R/E_1) + P(E_2) * P(R/E_2) + P(E_3) * P(R/E_3)} = \frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{3}}{\frac{71}{180}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{71}{180}} = \frac{2}{9} * \frac{180}{71} = \frac{40}{71}$$

ognuna delle tre formule precedenti rappresenta una applicazione del teorema di Bayes

tutte le definizioni di probabilità: classica, frequentista, soggettivista

definizione classica di probabilità (da Fermat a Laplace)

La probabilità classica di un evento casuale è uguale al rapporto tra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili:

$$P(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

La definizione classica, detta anche *a priori*, si utilizza quando:

- gli eventi hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi
- è possibile calcolare il numero dei casi favorevoli e dei casi possibili

esempio: vedi gli esempi delle pagine precedenti

definizione frequentista di probabilità (di Venn e Von Mises)

La probabilità frequentista di un evento è uguale al rapporto tra il numero di prove riuscite ed il numero di prove effettuate (tutte nelle stesse condizioni):

$$f(E) = \frac{\text{numero di prove riuscite}}{\text{numero di prove effettuate}}$$

$f(E)$ è detta anche **frequenza** dell'evento E

La definizione frequentista, detta anche *a posteriori*, si utilizza quando:

- gli eventi **non** hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi
- è possibile effettuare un certo numero di prove sperimentali tutte nelle medesime condizioni

esempio: consideriamo una puntina da disegno e lanciamola verso l'alto. Essa può cadere in due posizioni diverse:



con la punta rivolta verso l'Alto oppure con la punta rivolta verso il Basso.

Si vuole calcolare, ad esempio, la probabilità che cada con la punta rivolta verso il Basso.

In casi come questo non si può applicare la probabilità classica ma la probabilità frequentista.

Si effettuano N lanci, si conta il numero B di volte in cui la puntina si ferma con la punta verso il Basso e si ha:

$$f(E) = \frac{\text{prove riuscite}}{\text{prove effettuate}} = \frac{B}{N}$$

maggiore è il numero di lanci e più attendibile sarà il valore trovato

alcune proprietà

$0 \leq f(E) \leq 1$	$f(E) = 0$	$f(E) = 1$
come per la probabilità classica anche la frequenza è un numero compreso tra 0 e 1	non vuol dire che l'evento è impossibile ma solo che non si è mai verificato nelle prove	non vuol dire che l'evento è certo ma solo che si è sempre verificato durante le prove

legge dei grandi numeri

Al crescere delle prove effettuate la probabilità frequentista di un evento si avvicina sempre più alla probabilità classica dello stesso evento

Tale legge, detta anche *legge empirica del caso*, stabilisce una relazione tra la definizione classica di probabilità e quella frequentista. Un enunciato equivalente della legge dei grandi numeri è il seguente:

Su un numero molto alto di prove effettuate la frequenza di un evento assume un valore molto vicino alla sua probabilità classica

definizione soggettivista di probabilità (di Bruno De Finetti)

La probabilità soggettivista di un evento è la misura del grado di fiducia che una persona, in base alle informazioni in suo possesso e alla sua opinione, assegna al verificarsi dell'evento

La definizione soggettivista si utilizza quando non ci sono le condizioni per utilizzare le definizioni precedenti.

vediamo alcuni esempi nei quali si può applicare solo la probabilità soggettivista. Si vuole calcolare la probabilità

- che una nuova trasmissione televisiva incontri il favore del pubblico
- che una squadra di calcio con una formazione rinnovata vinca una partita
- che un nuovo prodotto commerciale incontri il favore dei consumatori